Simple K3 Singularities の Moduli について II(数式処理における理論と応用の研究)

高橋, 正

数理解析研究所講究録
第 848 巻 1993 年 49-57

Simple K3 Singularities の Moduli について II

神戸大学発達科学部　高橋 正 (Tadashi TAKAHASHI)[1)]

1. Nondegenerate hypersurface simple K3 singularities の定義方程式

Simple K3 singularities は (0,2) タイプの 3 次元 Gorenstein purely elliptic singularity として、渡辺により定義された ([1])。Nondegenerate hypersurface simple K3 singularities の定義方程式より得られる Newton 多面体は、非退化な Newton 多面体であり、かつ、その 3 次元 face が (1,1,1,1) を通るものとなる。

米村は、Nondegenerate hypersurface simple K3 singularities の定義方程式を分類し、95 通りの定義方程式を求めた。そして、それぞれの定義方程式に関する moduli の次元等を求めた。米村の分類によって得られた定義方程式は、moduli (パラメータ) が与えられていない。それは、moduli の条件 (パラメータの条件) を示さなければ、その方程式で定義される特異点の Newton 多面体が退化する可能性があるからである。そのため、米村の分類における定義方程式は、その Newton 多面体が非退化であるような (最も簡単な) 係数による一例となっている。

Nondegenerate hypersurface simple K3 singularities の定義方程式において moduli の次元は、1 以上 19 以下である。Moduli の次元が 1 のものは、3 タイプ、moduli の次元が 2 のものは、8 タイプ、moduli の次元が 3 のものは、7 タイプある。Moduli の次元が上がれば、その条件も複雑な連立方程式となる。

Moduli の次元が 1, 2, 3 の定義方程式は、次のようなものである。なお、各定義方程式の前の No は、米村の分類における No を示す ([2])。

Moduli の次元が 1 の定義方程式

No.52　$x^3 + y^4 + xz^3 + zw^4 = 0$
No.56　$x^2y + y^3z + z^5 + w^6 = 0$
No.73　$x^2 + y^5 + yz^5 + zw^6 = 0$

Moduli の次元が 2 の定義方程式

No.30　$x^2 + y^5 + z^5w + w^8 = 0$
No.46　$x^2 + y^3 + z^{11} + zw^{12} = 0$
No.61　$x^2z + y^4 + z^4w + w^7 = 0$
No.65　$x^2z + y^3 + z^6w + w^{11} = 0$
No.80　$x^2 + y^3z + z^8w + w^{11} = 0$
No.84　$x^3 + xz^3 + y^3z + yw^4 + z^2w^3 = 0$
No.86　$x^2y + xw^4 + y^3w + z^5 + zw^5 = 0$
No.91　$x^2 + y^4z + yz^5 + yw^6 + z^3w^4 = 0$

[1)]takahasi@icluna.kobe-u.ac.jp

Moduli の次元が 3 の定義方程式

No.57　$x^2y + y^4 + xz^3 + z^4w + w^6 = 0$
No.64　$x^2z + xy^2 + y^3w + z^6 + w^8 = 0$
No.68　$x^2z + y^3 + yz^5 + z^6w^2 + w^{10} = 0$
No.74　$x^2 + y^4w + yz^5 + z^4w^3 + w^8 = 0$
No.83　$x^2 + y^3 + yw^9 + z^{10}w + z^2w^{11} = 0$
No.90　$x^2 + y^4z + y^2w^5 + z^5w + zw^7 = 0$
No.92　$x^2 + y^3z + yw^9 + z^7w + zw^{11} = 0$

定義方程式の moduli の次元とは、座標変換により、その定義方程式を変形した (式を書き換えた) ときのパラメータの最小数である。例えば、上の No.30 の定義方程式はウエイトの計算により、

$$x^2,\ xyzw,\ y^5,\ xw^4,\ z^5w,\ y^2z^2w^2,\ yzw^5,\ w^8$$

の 8 つの項の組み合わせである。このとき、原点において孤立特異点を持つための必要条件として、x^2, y^5, xw^4, z^5w の 4 つの項の係数は、ゼロではない。そして、$x = x' + ayzw$ とおき、a をうまくとると、$xyzw$ の項を消去できる。同様にして、$x = x' + bw^4$ とおき、b をうまくとると、xw^4 の項を消去できる (このとき、変換後に w^8 の係数がゼロでないことが、原点において孤立特異点を持つための必要条件となる)。最後に、定数倍の座標変換により、x^2, y^5, z^5w, w^8 の 4 つの項の係数を 1 にすると、定義方程式に残るパラメータは、$y^2z^2w^2$ と yzw^5 の 2 つの項の係数である。この 2 が、定義方程式の moduli の次元となる。

このような式変形に対し、一定の手順を定め、その moduli の条件式 (関係式) を求める。式変形は、下記のような手順とする。

式変形手順

Moduli (パラメータ) のついた定義方程式に対し、次のような手順で式を変形する。

(1) 定義方程式の項をべきの次数により分ける。

(2) 次数の低い項からなる多項式を簡単化する (項に辞書式順序を導入し、出来る限り後ろの項へ線形変換により、式を書き換える)。

(3) 低次数の項を保ったまま、順次、次数の高い項に対して (2) を繰り返す。

(4) (3) が終えたら、有理変換により、消せる項を、次数の低い項から消して行く。

(5) 定数倍の座標変換により、次数の低い項から、項の係数を 1 にして行く。

2. Moduli の条件式

1 において示した 3 つのクラス (Nondegenerate hypersurface simple K3 singularities の定義方程式で moduli の次元が 1, 2, 3 のもの) について、moduli のついた定義方程式に対し、先の式変形を行い、その moduli の条件式を求める。

この結果、hypersurface simple K3 singularities の定義方程式で moduli の次元が 1 のものは、その条件はなく、全てのパラメータに対し、nondegenerate であり、moduli の次元が 2, 3 のものは、全て、パラメータに関する条件式を得た。そのパラメータに関する条件式は、次のようなものである (プログラム等を参考資料に示す)。

Moduli の次元が 2 の定義方程式

$$f_{30} = x^2 + y^5 + z^5w + w^8 + 5r_1y^2z^2w^2 + 5r_2yzw^5$$
$$\{r_1 \neq 0 \textbf{ or } 27r_2^5 + 1 \neq 0\} \textbf{ and } \{r_1^5 + 16 \neq 0 \textbf{ or } r_2 \neq 0\}$$
$$f_{46} = x^2 + y^3 + z^{11} + zw^{12} + r_1z^6w^6 + r_2yz^4w^4$$
$$\{144r_1^2 \neq 1 \textbf{ or } 64r_2^3 \neq -1587\} \textbf{ and } \{r_1^2 \neq 4 \textbf{ or } r_2 \neq 0\}$$
$$f_{61} = x^2z + y^4 + z^4w + w^7 + r_1y^2zw^2 + r_2z^2w^4$$
$$\{r_1^4 - 64 \neq 0 \textbf{ or } r_2 \neq 0\} \textbf{ and } \{r_1^4 - 64 \neq 0 \textbf{ or } 2r_2 - r_1^2 \neq 0\}$$
$$\textbf{and } \{r_1^4 - 1024 \neq 0 \textbf{ or } 16r_2 - r_1^2 \neq 0\} \textbf{ and}$$
$$\{r_1(-256 + r_1^4) = 0 \textbf{ or } r_1^2 + 4r_2 = 0 \textbf{ or}$$
$$-237568r_1^2 - 3136r_1^6 + 3r_1^{10} + 2621440r_2 = 0 \textbf{ or}$$
$$-3112960r_1^2 + 12864r_1^6 - 9r_1^{10} + 14155776r_2 = 0 \textbf{ or}$$
$$131072 - 512r_1^4 + r_1^8 - 2048r_1^2r_2 + 12r_1^6r_2 = 0 \textbf{ or}$$
$$12877824r_1^4 - 38592r_1^8 + 27r_1^{12} - 1879048192 \neq 0 \textbf{ or } r_2^2 \neq 4\} \textbf{ and}$$
$$\{r_1(-256 + r_1^4) = 0 \textbf{ or } 512 + 3r_1^4 = 0 \textbf{ or } -25024 + 63r_1^4 = 0 \textbf{ or}$$
$$-11328r_1^4 + 9r_1^8 + 1048576 \neq 0 \textbf{ or } 12288r_2 \neq r_1^2(2752 - 3r_1^4)\}$$
$$\textbf{and}$$
$$\{r_1(-256 + r_1^4) = 0 \textbf{ or } -122880 + 320r_1^4 + r_1^8 = 0 \textbf{ or}$$
$$2154496 + 1216r_1^4 + 7r_1^8 = 0 \textbf{ or}$$
$$-229376r_1^4 - 832r_1^8 + r_1^{12} + 26214400 \neq 0 \textbf{ or}$$
$$2621440r_2 \neq r_1^2(237568 + 3136r_1^4 - 3r_1^8)\} \textbf{ and}$$
$$\{r_1(-256 + r_1^4) = 0 \textbf{ or } -134217728 + 1867776r_1^4 - 4288r_1^8 + 3r_1^{12} = 0$$
$$\textbf{or } -150994944r_1^4 + 720896r_1^8 - 1600r_1^{12} + r_1^{16} + 17179869184 \neq 0$$
$$\textbf{or } 335544320r_2 \neq r_1^2(4194304 + 172032r_1^4 - 1216r_1^8 + r_1^{12})\}$$
$$\textbf{and } \{r_1^4 \neq 64 \textbf{ or } 4r_2 \neq -r_1^2\} \textbf{ and } \{r_1^4 \neq 256 \textbf{ or } 8r_2 \neq -r_1^2\}$$
$$\textbf{and } \{r_1^4 \neq 256 \textbf{ or } 8r_2 \neq r_1^2\} \textbf{ and } \{r_1 \neq 0 \textbf{ or } r_2^2 \neq 4\}$$
$$f_{65} = x^2z + y^3 + z^6w + w^{11} + r_1z^3w^6 + r_2yz^2w^4$$
$$\{r_1 = 0 \textbf{ or } r_1^2 - 4 = 0 \textbf{ or}$$
$$(864 + 216r_1^2)r_2^3 + 16r_2^6 \neq -11664 + 5832r_1^2 - 729r_1^4\}$$
$$\textbf{and } \{r_1^2 \neq 4 \textbf{ or } r_2^3 \neq -108\} \textbf{ and } \{r_1^2 \neq 4 \textbf{ or } r_2 \neq 0\} \textbf{ and}$$
$$\{r_1 \neq 0 \textbf{ or } r_2^3 + 27 \neq 0\}$$

$$f_{80} = x^2 + y^3z + z^8w + w^{11} + r_1yz^3w^4 + r_2z^4w^6$$
$$\{r_1 = 0 \textbf{ or } r_2 = 0 \textbf{ or }$$
$$(-5832 + 216r_1^3)r_2^2 + 729r_2^4 \neq -11664 - 864r_1^3 - 16r_1^6\} \textbf{ and }$$
$$\{r_1 \neq 0 \textbf{ or } r_2^2 \neq 4\} \textbf{ and } \{r_1^3 \neq -27 \textbf{ or } r_2 \neq 0\}$$
$$f_{84} = x^3 + xz^3 + y^3z + yw^4 + r_1z^2w^3 + r_2xyzw$$
$$\{r_2^2 - 12 = 0 \textbf{ or } 27r_1^2 + r_1r_2(-18 + r_2^2) + 16 - r_2^2 \neq 0\} \textbf{ and }$$
$$\{r_2^2 - 12 \neq 0 \textbf{ or } 9r_1 - r_2 \neq 0\} \textbf{ and }$$
$$\{r_2^2 + 12 = 0 \textbf{ or } 27r_1^2 + r_1r_2(18 + r_2^2) - 16 - r_2^2 \neq 0\} \textbf{ and }$$
$$\{r_2^2 + 12 \neq 0 \textbf{ or } 9r_1 + r_2 \neq 0\}$$
$$f_{86} = x^2y + xw^4 + y^3w + z^5 + 5r_1zw^5 + 5r_2yz^2w^2$$
$$\{1728r_1^5 - 1 \neq 0 \textbf{ or } r_2 \neq 0\} \textbf{ and } \{r_1 \neq 0 \textbf{ or } 64r_2^5 - 1 \neq 0\}$$
$$f_{91} = x^2 + y^4z + yz^5 + yw^6 + r_1z^3w^4 + r_2y^2z^2w^2$$
$$\{r_1 \neq 0 \textbf{ or } r_2 \neq 0\} \textbf{ and } \{12r_1 + r_2^2! = 0 \textbf{ or } 2r_2^3 + 27 \neq 0\} \textbf{ and }$$
$$\{r_1 \neq 0 \textbf{ or } r_2^3 + 18 \neq 0\}$$

Moduli の次元が 3 の定義方程式

Moduli の次元が 3 の定義方程式については、条件式を求めるための計算の規模が大きくなるため、現在、その全ては、明らかにできていない。ここでは、その一例として、次のものを示す。

$$f_{57} = x^2y + y^4 + xz^3 + w^6 + r_1y^2w^3 + r_2yz^2w^2 + r_3z^4w$$
$$\{r_1^2 \neq 4 \textbf{ or } 3r_2 + 4r_3^2 \neq 0 \textbf{ or } 27r_1^2 + r_1(-108 + 72r_2r_3 + 64r_3^3)$$
$$\neq -108 + 16r_2^3 + 144r_2r_3 + 16r_2^2r_3^2 + 128r_3^3\}$$
$$\textbf{and}$$
$$\{r_1^2 \neq 4 \textbf{ or } 4r_3^2 \neq -3r_2 \textbf{ or } 9r_1 \neq 18 - 4r_2r_3\}$$

f_n の n は、米村の分類における定義方程式の番号を表す。したがって、Moduli の次元が 2 の最後の結果は、米村の分類における 91 番目の定義方程式 (上記の No.91 の定義方程式) で、moduli を上記の方法で最小限にした式は、

$$x^2 + y^4z + yz^5 + yw^6 + r_1z^3w^4 + r_2y^2z^2w^2 = 0$$

であり、この方程式で定義される代数多様体の原点における特異点は、

$$\{r_1 \neq 0 \textbf{ or } r_2 \neq 0\} \textbf{ and } \{12r_1 + r_2^2! = 0 \textbf{ or } 2r_2^3 + 27 \neq 0\} \textbf{ and } \{r_1 \neq 0 \textbf{ or } r_2^3 + 18 \neq 0\}$$

のとき、Nondegenerate simple K3 singularity であることを示す。

3. Deformation

2 において示した条件式において、degenerate するときは、その方程式で定義される集合の原点における singularity は、non-isolated singularity となる。例えば、f_{30} の式

のパラメータが $r_1 = 0$ のとき、f_{30} で定義される集合の原点における singularity は、non-isolated singularity となる。このとき、f_{30} の式に higher terms (ウエイトの総和が 1 より大きい項) yz^5 と zw^5 を付け加えた式に対してうまく座標変換をすると、

$$x^2 + y^5 + yz^5 + zw^5 + ay^2z^2w^2 + (\text{higher terms}) \quad (a\text{はパラメータ})$$

となる。このことから、

$$x^2 + y^5 + z^5w + w^8 + 5r_1y^2z^2w^2 + 5r_2yzw^5 + yz^5 + zw^5 = 0$$

で定義される集合の原点における singularity は、$r_1 = 0$ のとき、米村の分類における No.30 の singularity から No.73 の singularity に変化する。

これと同様なことがすべての moduli の次元が 2 の hypersurface simple K3 singularities の定義方程式に対して起こる。

また、f_{57} の式のパラメータが $r_1^2 = 4$ のとき、f_{57} で定義される集合の原点における singularity は、non-isolated singularity となる。このとき、f_{57} の式に higher terms (ウエイトの総和が 1 より大きい項) w^7 を付け加えた式に対してうまく座標変換をすると、

$$x^2z + y^4 + z^4w + w^7 + ay^2zw^2 + bz^2w^4 + (\text{higher terms}) \quad (a, b\text{はパラメータ})$$

となる。このことから、

$$x^2y + y^4 + xz^3 + w^6 + r_1y^2w^3 + r_2yz^2w^2 + r_3z^4w + w^7 = 0$$

で定義される集合の原点における singularity は、$r_1^2 = 4$ のとき、米村の分類における No.57 の singularity から No.61 の singularity に変化する。

これと同様なことが moduli の次元が 3 の hypersurface simple K3 singularities の定義方程式に対して (現在調べたものについては、全て) 起こっている。

No.57 の定義方程式を f とおくと、$f = 0$ によって定義される集合の原点における特異点の resolution は、$\{f_{57}\text{の条件}\}$ の下で 2A1, A2, A4, A8 and Simple K3 となり、$r_1^2 \neq 4 + \{f_{61}\text{の条件}\}$ の下で 2A1, A5, A10 and Simple K3 となる。このような関係は、他の定義方程式についても成り立つ。そして、moduli の次元が 3, 4, ... , 19 と上がっていったとき、どのような関係があるのかが、興味深いところである。Moduli の次元が 19 のものは、3 タイプあり、原点における特異点の resolution は、simple K3 のみである。Moduli の次元が 19 の定義方程式について、その条件式を明らかにできれば、simple K3 の性質を考察することができる。これらの関係を明かにして行くことにより、hypersurface simple K3 singularities の moduli を解明したい。

A. 参考資料 (Mathematica による計算)

```
f30 = x^2 + y^5 + z^5 w + w^8 +  r1 y^2 z^2 w^2 + r2 y z w^5;
dx = D[f30,x]; dy = D[f30,y]; dz = D[f30,z]; dw = D[f30,w];
Timing[Reduce[{dx, dy, dz, dw}=={0, 0, 0, 0}, {x, y, z, w}]]
```

---- 計算結果 ----

```
w != 0 && r2 != 0 && r1 == 0 && 27*r2^5 == -3125 && (y == (3^(11/5)*
r2^4*w^(8/5))/625 && z == w^(7/5)/3^(1/5) && x == 0 || y == ((-1)^(8/5)*
3^(11/5)*r2^4*w^(8/5))/625 && z == ((-1)^(2/5)*w^(7/5))/3^(1/5) && x ==
0 || y == ((-1)^(6/5)*3^(11/5)*r2^4*w^(8/5))/625 && z == ((-1)^(4/5)*
w^(7/5))/3^(1/5) && x == 0 || y == ((-1)^(4/5)*3^(11/5)*r2^4*w^(8/5))/625
&& z == ((-1)^(6/5)*w^(7/5))/3^(1/5) && x == 0 || y == ((-1)^(2/5)*3^(11/5)*
r2^4*w^(8/5))/625 && z == ((-1)^(8/5)*w^(7/5))/3^(1/5) && x == 0) ||
r2 != 0 && ((y == 0 || y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0
&& x == 0 || (y == 0 || y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0
&& x == 0 || (y == 0 || y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0
&& x == 0 || (y == 0 || y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0
&& x == 0 || (y == 0 || y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0
&& x == 0) || w != 0 && 16*r1^5 == -3125 && r2 == 0 && (y == (2^(9/5)*r1^2*
w^(8/5))/25 && z == 2^(1/5)*w^(7/5) && x == 0 || y == ((-1)^(8/5)*2^(9/5)*
r1^2*w^(8/5))/25 && z == (-1)^(2/5)*2^(1/5)*w^(7/5) && x == 0 ||
y == ((-1)^(6/5)*2^(9/5)*r1^2*w^(8/5))/25 && z == (-1)^(4/5)*2^(1/5)*w^(7/5)
&& x == 0 |\ | y == ((-1)^(4/5)*2^(9/5)*r1^2*w^(8/5))/25 && z == (-1)^(6/5)*
2^(1/5)*w^(7/5) && x == 0 || y == ((-1)^(2/5)*2^(9/5)*r1^2*w^(8/5))/25
&& z == (-1)^(8/5)*2^(1/5)*w^(7/5) && x == 0) |\ | r2 == 0 && ((y == 0 ||
y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0 && x == 0 || (y == 0 ||
y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0 && x == 0 || (y == 0 ||
y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0 && x == 0 || (y == 0 ||
y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0 && x == 0 || (y == 0 ||
y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0 && x == 0)}
{5608.58 Second, w != 0 && r2 != 0 && r1 == 0 &&
     5
27 r2  == -3125 &&
        11/5   4  8/5          7/5
       3     r2  w            w
(y == -------------- && z == ---- && x == 0 ||
           625                 1/5
                              3
               8/5  11/5   4  8/5
           (-1)    3     r2  w
      y == ---------------------- &&
                    625
                2/5  7/5
            (-1)    w
       z == ----------- && x == 0 ||
                 1/5
                3
               6/5  11/5   4  8/5
           (-1)    3     r2  w
      y == ---------------------- &&
                    625
                4/5  7/5
            (-1)    w
       z == ----------- && x == 0 ||
                 1/5
                3
               4/5  11/5   4  8/5
```

```
           (-1)    3     r2  w
      y == ---------------------- &&
                  625
                6/5  7/5
            (-1)    w
       z == ------------ && x == 0 ||
                 1/5
                3
               2/5  11/5   4  8/5
           (-1)    3     r2  w
      y == ---------------------- &&
                    625
                8/5  7/5
            (-1)    w
       z == ------------ && x == 0) ||
                 1/5
                3
    r2 != 0 && ((y == 0 || y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0
&& x == 0 || (y == 0 || y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0
&& x == 0 || (y == 0 || y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0
&& x == 0 || (y == 0 || y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0
&& x == 0 || (y == 0 || y == 0 || y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0
&& x == 0) ||
                   5
   w != 0 && 16 r1  == -3125 && r2 == 0 &&
           9/5   2  8/5
          2    r1  w             1/5  7/5
    (y == -------------- && z == 2    w    &&
               25
                          8/5  9/5   2  8/5
                      (-1)    2    r1  w
       x == 0 || y == --------------------- &&
                               25
                2/5  1/5  7/5
       z == (-1)    2    w    && x == 0 ||
               6/5  9/5   2  8/5
           (-1)    2    r1  w
      y == --------------------- &&
                    25
                4/5  1/5  7/5
       z == (-1)    2    w    && x == 0 ||
               4/5  9/5   2  8/5
           (-1)    2    r1  w
      y == --------------------- &&
                    25
                6/5  1/5  7/5
       z == (-1)    2    w    && x == 0 ||
               2/5  9/5   2  8/5
           (-1)    2    r1  w
      y == --------------------- &&
                    25
          8/5  1/5  7/5
```

```
 z == (-1)    2    w    && x == 0) || r2 == 0 && ((y == 0 || y == 0 ||
y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0 && x == 0 || (y == 0 || y == 0 ||
y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0 && x == 0 || (y == 0 || y == 0 ||
y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0 && x == 0 || (y == 0 || y == 0 ||
y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0 && x == 0 || (y == 0 || y == 0 ||
y == 0 || y == 0) && z == 0 && w == 0 && x == 0)}
Clear[f30, dx, dy, dz, dw]

----   (以後プログラムのみを示す)   ----

f46 = x^2 + y^3 + z^11 + z w^12 +  r1 z^6 w^6 + r2 y z^4 w^4;
dx = D[f46,x]; dy = D[f46,y]; dz = D[f46,z]; dw = D; [f46,w];
Timing[Reduce[{dx, dy, dz, dw}=={0, 0, 0, 0}, {x, y, z, w}]]
Clear[f46, dx, dy, dz, dw]
f61 = x^2 z + y^4 + z^4 w + w^7 +  r1 y^2 z w^2 + r2 z^2 w^4;
dx = D[f61,x]; dy = D[f61,y]; dz = D[f61,z]; dw = D[f61,w];
Timing[Reduce[{dx, dy, dz, dw}=={0, 0, 0, 0}, {x, y, z, w}]]
Clear[f61, dx, dy, dz, dw]
f65 = x^2 z + y^3 + z^6 w + w^11 +  r1 z^3 w^6 + r2 y z^2 w^4;
dx = D[f65,x]; dy = D[f65,y]; dz = D[f65,z]; dw = D[f65,w]; dy1 = dy;
dz1 = Together[(dz - x^2) / (z w)]; dw1 = dw; Clear[f65, dx, dy, dz, dw]
dy2 = Expand[dy1 w^6 z^4]; dz2 = Expand[((dz1 z^2 w - dy1 2 y) / (-3))
w^9 z^6]; dw2 = Expand[(dw1 - 2 dz1 z^2) / 11]; Clear[dy1, dz1, dw1]
dy3 = 3 a^2 + r2 b^2 c^2; dz3 = 2 a^3 - r1 b^3 c^3 - 2 b^2 c^4; dw3 =
b^2 - c^2; Clear[dy2, dz2, dw2]
Timing[Reduce[{dy3, dz3, dw3}=={0, 0, 0}, {a, b, c}]]
Clear[dy3, dz3, dw3]
f80 = x^2 + y^3 z + z^8 w + w^11 +  r1 y z^3 w^4 + r2 z^4 w^6;
dx = D[f80,x]; dy = D[f80,y]; dz = D[f80,z]; dw = D[f80,w];
dy1 = Together[ dy / z]; dz1 = dz;
dw1 = Expand[ (2 dw w - 3 dz z + dy y) / (22 w)];
Clear[f80, dx, dy, dz, dw]
dy2 = Expand[dy1 w^6 z^6];
dz2 = Expand[((dz1 - dy1 3 y) w^9 z^9) / ( - 4 )];
dw2 = dw1; Clear[dy1, dz1, dw1]
dy3 = 3 a^2 + r1 b^2 c^2; dz3 = 2 a^3 - r2 b^3 c^3 - 2 b^2 c^4;
dw3 = b^2 - c^2; Clear[dy2, dz2, dw2]
Timing[Reduce[{dy3, dz3, dw3}=={0, 0, 0}, {a, b, c}]]
Clear[dy3, dz3, dw3]
f84 = x^3 + x z^3 + y^3 z + y w^4 +  r1 z^2 w^3 + r2 x y z w;
dx = D[f84,x]; dy = D[f84,y]; dz = D[f84,z]; dw = D[f84,w];
dy1 = Expand[(9 dx x - 8 dy y - 3 dz z + 2 dw w) / 27];
dz1 = Expand[ (- dx x + 3 dy1 + dz z) / ( - 2 z)];
dw1 = Expand[(dy y - 3 dz z + 2 dw w ) / 9]; dx2 = Expand[dx z^2];
dy2 = Expand[dy1 z^8]; dz2 = Expand[dz1 z^9]; dw2 = Expand[dw1 z^3];
dx3 = 3 a^2 + r2 b d + c;
dy3 = a^3 c - b^3; dz3 = b^3 - r1 c^2 d^3 - a c^2; dw3 = b d^4 - a c;
Clear[f84, dx, dy, dz, dw, dy1, dz1, dw1,  dx2, dy2, dz2, dw2]
a = ( b d^4 ) / c; Expand[dw3]
dx4 = Expand[dx3 c^2]; dy4 = Expand[dy3 c^2]; dz4 = Expand[dz3];
(* b=0 -> from dx4=0, c=0. We assume b=/0 *)
dy5 = Expand[dy4 / ( - b^3 )]; Clear[dx3, dy3, dz3, dw3, dy4, a]
```

```
dx5 = 3 x^2 z + r2 x y^2 + y^3; dy6 = y^2 - z^2; dz5 = x^3 - x y z - r1
y^2 z x^3 - x*y*z - r1*y^2*z; Clear[dx5, dy6, dz5]
s1 = 3 t^2 + r2 t + 1; s2 = t^3 - t - r1;
Timing[Reduce[{s1, s2}=={0, 0}, t]]
s3 = 3 t^2 + r2 t - 1; s4 = t^3 + t - r1;
Timing[Reduce[{s3, s4}=={0, 0}, t]]
Clear[s1, s2, s3, s4]
f86 = x^2 y + x w^4 + y^3 w + z^5 +  r1 z w^5 + r2 y z^2 w^2;
dx = D[f86,x]; dy = D[f86,y]; dz = D[f86,z]; dw = D[f86,w];
dz1 = Expand[(dw w - 5 dz z + 8 dy y - 4 dx x) / 25];
dw1 = Expand[dw w - 2 dy y]; Timing[Reduce[{dx, dy, dz1, dw1}==
{0, 0, 0, 0}, {x, y, z, w}]]
Clear[f86, dx, dy, dz, dw, dz1, dw1]
f91 = x^2 + y^4 z + y z^5 + y w^6 +  r1 z^3 w^4 + r2 y^2 z^2 w^2;
dx = D[f91,x]; dy = D[f91,y]; dz = D[f91,z]; dw = D[f91,w];
Timing[Reduce[{dx, dy, dz, dw}== {0, 0, 0, 0}, {x, y, z, w}]]
Clear[f91, dx, dy, dz, dw]
f57 = x^2 y + y^4 + x z^3 + w^6 +  r1 y^2 w^3 + r2 y z^2 w^2 + r3 z^4 w;
dx = D[f57,x]; dy = D[f57,y]; dz = D[f57,z]; dw = D[f57,w];
(* y is not equal to zero x=0 and w=/0 -> r1=2 or -2 *)
dy1 = Expand[z^3 (2 y dy - x dx)];
dz1 = Expand[z^3 (z dz - 2 y dy + x dx)/4];
dw1 = Expand[z^6 (4 w dw - z dz - 6 y dy + 3 x dx)/24];
Clear[dx,dy,dz,dw,dy1,dz1,dw1]
(* x=X, y=Y, z^3=Z, wz=W *)
dx2 = 2 X Y + Z; dy2 = 4 r1 Y^2 W^3 + 8 Y^4 Z + 2 r2 Y Z W^2 - X Z^2;
dz2 = - r1 Y^2 W^3 - 2 Y^4 Z + X Z^2 + r3 Z^2 W; dw2 = W^6 - Y^4 Z^2;
Z = - 2 X Y; dy3 = Expand[dy2/(4 Y^2)]; dz3 = Expand[dz2/Y^2];
dw3 = Expand[dw2]; dzz = Expand[(dz3 + dy3)/X]; X = W^3 /(2 Y^3);
Expand[(dy3 8 Y^9)/(W^3)]; Expand[(dzz 4 Y^6)/(W^2)];
Clear[dx2,dy2,dz2,dw2,dx3,dy3,dz3,dzz]
(* W^2=a, Y^3=b *)
dx4 = - a^3 - 4 r2 a b^2 - 16 b^3 + 8 r1 b^3;
dy4 = 3 a^2 + 8 r3 a b - 4 r2 b^2; (* t=a/b *)
Clear[dx4,dy4]
dx5 = - t^3 - 4 r2 t - 16 + 8 r1; dy5 = 3 t^2 + 8 r3 t - 4 r2;
Timing[Reduce[{dx5, dy5}=={0, 0}, {t}]]
```

参 考 文 献

[1] Shihoko Ishii and Kimio Watanabe: On simple K3 singularities (in Japanese), Notes appearing in the Proceedings of the Conference Algebraic Geometry at Tokyo Metropolitan Univ. 1988, pp. 20-31.

[2] Takashi Yonemura: Hypersurface Simple K3 Singularities, Tohoku Mathematical Journal, The Second Series, vol. 42, no. 3, 1990, pp. 351-380.